ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ THU HÀ

VỀ DÃY K-FIBONACCI

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NÔNG QUỐC CHINH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Trước hết, tôi xin gửi lời biết ơn chân thành đến PGS. TS. Nông Quốc Chinh đã hướng dẫn tôi hoàn thành bản luận văn này. Khi bắt đầu nhận đề tài thực sự tôi cảm nhận đề tài mang nhiều nội dung mới mẻ. Hơn nữa với vốn kiến thức ít ỏi cùng với kinh nghiệm làm đề tài không nhiều nên tôi chưa thực sự tự tin để tiếp cận đề tài. Mặc dù rất bận rộn trong công việc nhưng Thầy vẫn dành nhiều thời gian và tâm huyết trong việc hướng dẫn, động viên khuyến khích tôi trong suốt thời gian tôi thực hiện đề tài. Trong quá trình tiếp cận đề tài đến quá trình hoàn thiện luận văn Thầy luôn tận tình chỉ bảo và tạo điều kiện tốt nhất nhất cho tôi hoàn thành luận văn. Cho đến bây giờ luận văn thạc sĩ của tôi đã được hoàn thành, xin cảm ơn Thầy đã đôn đốc nhắc nhở tôi.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, Khoa Toán - Tin và Phòng Đào tạo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin trân trọng cảm ơn các Thầy, Cô đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu, các thầy cô giáo trường THPT Ngô Thì Nhậm - Ninh Bình nơi tôi công tác đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành công việc chuyên môn tại nhà trường để tôi hoàn thành chương trình học tập cao học.

Cuối cùng, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn đến gia đình, bạn bè, những người không ngừng động viên, hỗ trợ tạo mọi điều kiện tốt nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Hà

Mở đầu

Dãy Fibonacci được đưa ra và nghiên cứu từ những năm 1202. Nó đóng vai trò quan trong trong những vấn đề khác nhau của Toán học và thu hút sự quan tâm của rất nhiều nhà Toán học. Mặc dù đã được biết đến từ rất lâu đời nhưng còn khá nhiều các vấn đề liên quan đến dãy Fibonacci và các mở rộng của nó còn chưa được nghiên cứu. Vì thế người ta luôn tìm cách mở rộng dãy Fibonacci để ứng dụng vào nghiên cứu các bài toán cụ thể. Một trong các hướng mà rất nhiều nhà toán học quan tâm đó là cách xây dựng các dãy số có tính chất đẹp tương tự như dãy Fibonacci hoặc là xây dựng các dãy số mở rộng của dãy Fibonacci.

Năm 2007, Falcon và Plaza đã đưa ra định nghĩa về dãy k-Fibonacci để ứng dụng vào nghiên cứu bài toán phân vùng 4 tam giác có cạnh lớn nhất. Bài toán phân vùng 4 tam giác cạnh dài nhất (viết ngắn gọn là 4TLE) được xây dựng bằng cách nối trung điểm của cạnh dài nhất với đỉnh đối diện và đến điểm giữa của hai cạnh còn lại. Bài toán này được đưa ra và nghiên cứu bởi tác giả M.C. Rivara vào năm 1996. Gần đây có rất nhiều kết quả liên quan đến dãy k-Fibonacci. Khi $k = 1$ thì dãy k-Fibonacci chính là dãy Fibonacci. Hơn nữa khi $k = 2$ thì dãy k-Fibonacci chính là dãy Pell. Do đó với những kết quả đã biết về dãy Fibonacci và dãy Pell chúng ta có thể mở rộng cho dãy k-Fibonacci. Ngược lại, từ các kết quả cho dãy k-Fibonacci chúng ta sẽ có ngay các kết quả tương ứng cho các dãy Fibonacci và dãy Pell.

Mục tiêu của luận văn là trình bày các kết quả về dãy k-Fibonacci và ứng dụng của nó. Các kết quả chính trong luận văn được viết dựa theo các tài liệu [1], [2], và [3].

Nội dung chính của luận văn được trình bày trong ba chương. Chương 1 dành để trình bày một số tính chất của ước chung lớn nhất và các tính chất quan trọng của dãy Fibonacci. Đặc biệt là công thức Binet, nó được dùng trong rất nhiều các chứng minh sau này.

Chương 2 dành để trình bày về dãy k-Fibonacci. Trong chương này chúng tôi trình bày về hàm sinh, công thức Binet và các tính chất của dãy k-Fibonacci. Đặc biệt là các công thức đồng nhất của dãy k-Fibonacci. Các kết quả trong chương này được viết theo tài liệu [2] và [3].

Chương 3 trình bày về một số ứng dụng cụ thể của dãy k-Fibonacci. Đặc biệt là mối liên hệ với bài toán phân vùng 4 tam giác có cạnh lớn nhất. Hơn nữa từ mối quan hệ với dạng ma trận của các ánh xạ phức $R^{k-1}.L$ chúng ta thu được một số kết quả quen biết về dãy k-Fibonacci.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1 Ước chung lớn nhất

Mục đích của tiết này là trình bày một số tính chất quan trọng về ước chung lớn nhất của một dãy các số nguyên dương, được dùng cho các chứng minh ở các phần sau. Các kết quả trong tiết này được viết theo tài liệu [1].

Để thuận tiện cho trình bày ta ký hiệu ước chung lớn nhất của một dãy các số nguyên dương $a_1, \ldots, a_t,\ t \geq 2$ là $\gcd(a_1, \ldots, a_t)$.

Bổ đề 1.1.1. *Cho m, n, q là các số nguyên dương. Giả sử $n|q$. Khi đó, ta có*

$$\gcd(m + q, n) = \gcd(m, n).$$

Chứng minh. Theo giả thiết $n|q$ nên $q = rn$, với r là số nguyên dương nào đó. Đặt $g = \gcd(m + rn, n)$ thì ta có $g\,|(m + rn)$ và $g\,|n$. Do đó tồn tại các số nguyên dương r_1, r_2 sao cho $n = r_1 g$ và $m + rn = r_2 g$. Do đó

$$m = r_2 g - rn = (r_2 - r_1 r)\, g,$$

nghĩa là $g\,|m$. Lấy tùy ý số tự nhiên $d \in \mathbb{N}$ sao cho $d\,|m$ và $d\,|n$. Suy ra $d\,|(m + rn)$. Kết hợp với $g = \gcd(m + rn, n)$ ta suy ra $d\,|g$. Vậy $g\,|\gcd(m, n)$. Vì thế $\gcd(m + q, n) = \gcd(m, n)$. □

Bổ đề 1.1.2. *Cho m, n là các số nguyên dương. Khi đó $n|m$ khi và chỉ khi* $\gcd(m, n) = n$.

Chứng minh. Giả sử $n|m$ ta cần chứng minh $\gcd(m, n) = n$. Vì $n|m$ nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $m = qn$. Suy ra $\gcd(m, n) = \gcd(qn, n)$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trên bằng quy nạp theo q. Với $q = 1$, ta có

$$\gcd(n, n) = n.$$

Giả sử đẳng thức đúng với $q > 1$, ta chứng minh đẳng thức đúng với $q + 1$. Thật vậy theo Bổ đề 1.1.1 và giả thiết quy nạp, ta có

$$\gcd(qn + n, n) = \gcd(qn, n) = n.$$

Vậy điều kiện cần được chứng minh.

Ngược lại, giả sử $\gcd(m, n) = n$ ta cần chứng minh $n|m$. Thật vậy, vì $\gcd(m, n) = n$ nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $m = qn$, nghĩa là $n\,|m$. Vậy điều kiện đủ được chứng minh. □

Bổ đề 1.1.3. *Cho* m, n, q *là các số nguyên dương. Khi đó, nếu* $\gcd(m, n) = 1$ *thì* $\gcd(m, nq) = \gcd(m, q)$.

Chứng minh. Giả sử $g = \gcd(m, q)$ và $g' = \gcd(m, nq)$. Suy ra $g'|m$ và $g'|nq$; $g|m$ và $g|q$. Vì $g|q$ nên $g|nq$. Suy ra $g\left|g'\right.$. Từ các điều kiện

$$\gcd(m, n) = 1,\ g'|m \text{ và } g'|nq,$$

ta suy ra $g'|q$. Mặt khác $g = \gcd(m, q)$, do đó $g'|g$. Vậy $g = g'$. □

1.2 Dãy Fibonacci, hàm sinh, công thức Binet

Định nghĩa 1.2.1. Dãy số Fibonacci, ký hiệu $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ được định nghĩa bởi công thức truy hồi

$$\begin{cases} F_0 = 0, \\ F_1 = 1, \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1), \end{cases}$$

ở đây F_n là số hạng thứ n của dãy số Fibonacci.

Từ hệ thức truy hồi của dãy Fibonacci ta có

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0,$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó ta có phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ hay $x^2 = x + 1$. Nhân hai vế của phương trình với x^{n-1} ta được

$$x^{n+1} = x^n + x^{n-1}. \tag{1.1}$$

Rõ ràng nếu φ là một nghiệm của phương trình (1.1) thì $1-\varphi$ cũng là một nghiệm của phương trình (1.1). Do đó

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1} \text{ và } (1-\varphi)^{n+1} = (1-\varphi)^n + (1-\varphi)^{n-1}.$$

Với mỗi cặp số thực a, b, ta đặt $F_{a,b}(n) = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$. Khi đó tất cả các hàm này thỏa mãn hệ thức truy hồi Fibonacci.

Định nghĩa 1.2.2. Các hàm $F_{a,b}(n) = a\varphi^n + b(1-\varphi)^n$ được gọi là hàm sinh.

Trong Định nghĩa dãy Fibonacci, các số hạng của dãy được cho dưới dạng truy hồi nên khi sử dụng dãy đôi khi gặp khó khăn. Mệnh đề sau đây cho ta công thức tường minh của dãy Fibonacci và được gọi là công thức Binet. Công thức Binet được sử dụng hữu hiệu trong các chứng minh sau này.

Mệnh đề 1.2.3. *Dãy số Fibonacci được cho bởi công thức*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Mệnh đề 1.2.4. *Cho n là một số nguyên dương. Khi đó, ta có*

$$\gcd(F_n, F_{n+1}) = 1.$$

Chứng minh. Giả sử

$$g = \gcd(F_n, F_{n+1}) \neq 1.$$

Khi đó, ta có $g\,|F_n$ và $g\,|F_{n+1}$. Theo công thức truy hồi của dãy Fibonacci

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}, \ \ (n \geq 1).$$

Suy ra $g|F_{n-1}$. Lặp lại quá trình ta có $g|1$, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $gcd(F_n, F_{n+1}) = 1$. □

Mệnh đề 1.2.5. *Cho m, n là các số nguyên dương. Khi đó, ta có*

$$F_{m+n} = F_{m-1}.F_n + F_m.F_{n+1}. \tag{1.2}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh khẳng định trong bổ đề bằng quy nạp theo n. Với $n = 1$ đẳng thức (1.2) trở thành

$$F_{m+1} = F_{m-1}.F_1 + F_m.F_2.$$

Ta có $F_1 = F_2 = 1$ nên đẳng thức cần chứng minh thành $F_{m+1} = F_{m-1} + F_m$. Đẳng thức này luôn đúng theo định nghĩa của dãy Fibonacci.

Giả sử đẳng thức (1.2) đúng với $n = k$, nghĩa là

$$F_{m+k} = F_{m-1}.F_k + F_m.F_{k+1}.$$

Ta cần chứng minh đẳng thức đúng với $n = k + 1$, nghĩa là

$$F_{m+k+1} = F_{m-1}.F_{k+1} + F_m.F_{k+2}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
F_{m+k+1} &= F_{m+k-1} + F_{m+k} \\
&= F_{m-1}.F_{k-1} + F_m.F_k + F_{m-1}.F_k + F_m.F_{k+1} \\
&= F_{m-1}(F_k + F_{k-1}) + F_m(F_k + F_{k+1}) \\
&= F_{m-1}.F_{k+1} + F_m.F_{k+2}.
\end{aligned}$$

Vậy theo quy nạp ta có điều phải chứng minh. □

Kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 1.2.5.

Hệ quả 1.2.6. *Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $n \geq 1$. Khi đó*

$$F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).$$

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 1.2.5 ta có

$$F_{n+m} = F_{n-1}.F_m + F_n.F_{m+1}.$$

Thay $m = n$ ta được

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= F_{n-1}.F_n + F_n.F_{n+1} \\
&= F_n(F_{n-1} + F_{n+1}).
\end{aligned}$$

□

Bổ đề 1.2.7. *Cho m, n là hai số nguyên dương sao cho $m|n$. Khi đó, ta có $F_m|F_n$.*

Chứng minh. Vì $m\,|n$ nên tồn tại số nguyên dương q sao cho $n = qm$. Ta sẽ chứng minh khẳng định trong bổ đề bằng quy nạp theo q. Với $q = 1$, ta có $n = m$, do đó $F_m|F_m$. Giả sử khẳng định trong bổ đề là đúng với $q > 1$.

Ta chứng minh đẳng thức đúng với $q + 1$. Theo Mệnh đề 1.2.5, ta có

$$F_{qm+m} = F_{qm-1}F_m + F_{qm}F_{m+1}.$$

Rõ ràng $F_m|F_{qm-1}F_m$. Theo giả thiết quy nạp $F_m|F_{qm}$. Do đó $F_m|F_{qm}F_{m+1}$. Vậy

$$F_m|(F_{qm-1}F_m + F_{qm}F_{m+1}) = F_{qm+m}.$$

□

Bổ đề 1.2.7 cho ta một hệ quả trực tiếp sau.

Hệ quả 1.2.8. *Nếu n là một hợp số khác 4 thì F_n là một hợp số.*

Chứng minh. Vì n là hợp số khác 4 nên tồn tại số nguyên dương $m \geq 2$ sao cho $m|n$. Theo Bổ đề 1.2.7 ta có $F_m|F_n$, nghĩa là F_n là hợp số. □

Mệnh đề 1.2.9. *Cho hai số nguyên dương m, n. Khi đó*

$$gcd(F_m, F_n) = F_{gcd(m,n)}.$$

Chứng minh. Sử dụng phép chia với dư, tồn tại các số nguyên dương q_0, r_1 sao cho

$$m = nq_0 + r_1,\ \ 0 \leq r_1 \leq n.$$

Kết hợp với Bổ đề 1.2.5, ta có

$$gcd\,(F_m, F_n) = \text{gcd}\,(F_{nq_0-1}F_{r_1} + F_{nq_0}F_{r_1+1}, F_n)\,.$$

Theo Bổ đề 1.2.7 ta có $F_n|F_{nq_0}$. Do đó theo Bổ đề 1.1.1 ta có

$$\text{gcd}(F_m, F_n) = \text{gcd}(F_{nq_0-1}F_{r_1}, F_n).$$

Mặt khác $\text{gcd}\,(F_m, F_n) = \text{gcd}\,(F_{r_1}, F_n)$. Tiếp tục quá trình cho đến n cùng với thuật toán Euclide, ta nhận được

$$\text{gcd}(F_m, F_n) = \text{gcd}(F_{r_{k-1}}, F_{r_k}),$$